

### 3. PROMENE STANJA IDEALNIH GASOVA I REALNIH FLUIDA U PROTOČNIM TERMODINAMIČKIM SISTEMIMA

#### 3.1 Podela radnih supstancija u termodinamici

- Jednačine stanja (termo-mehaničke i energetske) nekih radnih supstanci imaju veoma jednostavan analitički oblik, dok su kod drugih ove jednačine veoma složene i zavise od brojnih empirijskih koeficijenata.
- Praktično je podeliti – razdvojiti radne supstance
- Po agregatnom stanju – gasovi, tečnosti i čvrste supstance (tečnosti i čvrste supstance „u glavnom“ smatramo mešljivim  $dV = 0$ ).

GASOVI	TEČNOSTI	ČVRSTO STANJE
idealni	nestišljive supstancije	
poluidealni		
realni gasovi	realne tečnosti	realne čvrste supstance

- Sve supstancije u prirodi su realne!
- Idealni, poluidealni gasovi i „nestišljive“ tečnosti i supstance u čvrstom stanju ne menjaju agregatno stanje
- Realne supstancije – menjaju agregatno stanje
- Realne supstancije – postoje komplikovani izrazi za term-mehaničke i energetske jednačine stanja

#### 3.2 Idealan gas

*def.* Pod idealnim gasom podrazumeva se supstanca čije su molekule tačke, između kojih ne postoje ni privlačne ni odbojne međumolekularne sile. Usled toga, svaki sudar ovih molekula je centralan i u potpunosti elastičan.

- Materijalne tačke – molekuli oblika savršene loptice, prečnika  $d \rightarrow 0$ , a koje poseduju masu mirovanja
- Izostanak međumolekularnih sila i uslov da  $d \rightarrow 0$ , omogućavaju uvek centralne i potpuno elastične sudare
  - Na osnovu takvih pretpostavki, moguće je koristeći isključivo zakone mehanike, izvesti termo-mehaničku i energetske jednačine stanja, odnosno, zavisnosti  $f(p, T, v) = 0$ ,  $g(u, p, T) = 0$ ,  $\psi(h, p, T) = 0$ .
  - Lakše, na „empirijski“ način

- Idealan gas ne postoji, ali se svi gasovi na visokim temperaturama i niskim pritiscima ponašaju kao idealni ( npr.  $O_2 -187,95^\circ\text{C}$ ,  $101325\text{ Pa}$ ,  $-219^\circ\text{C}$  )
- Istorijski, do jednačine stanja se došlo empirijski.
- Na osnovu Bojlovog zakona (1662) i Gej Lisakovog zakona (1802), Klapejron prvi formuliše izraz (1834)

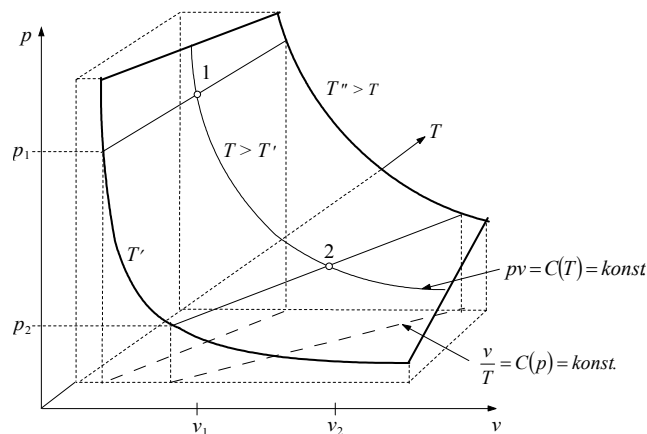
$$pV = n \cdot R \cdot T$$

poznat kao JEDNAČINA STANJA IDEALNOG GASA.

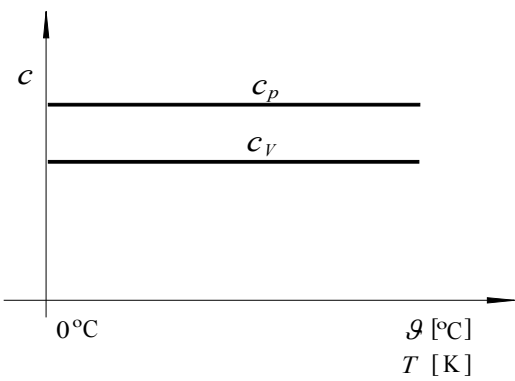
- Razni oblici termo-mehaničke jednačine stanja idealnog gasa

Za 1 kg supstancije	$p v = R T$	množenjem sa $m$ [kg] supstancije
Za $m$ [kg] supstancije	$p V = m R T$	Korišćenjem relacije koja povezuje masu $m$ , molarnu masu $M$ i količinu neke supstancije $n$ $m = M \cdot n$
Za $n$ [mol] supstancije	$p V = n M R T$	Korišćenjem relacije koja povezuje individualnu gasnu konstantu $R$ , molarnu masu $M$ i univerzalnu gasnu konstantu $R = 8,314\text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ $R \cdot M = \mathcal{R}$
Za $n$ [mol] supstancije	$p V = n \mathcal{R} T$	Svođenjem na 1 mol supstancije
Za 1 mol supstancije	$p V_m = \mathcal{R} T$	

- Jednačina termo-mehaničkog stanja idealnog gasa u  $p-T-v$  koordinatnom sistemu



- Na osnovu zavisnosti specifičnih toplotnih kapaciteta pri stalnoj zapremini i stalnom pritisku od veličina stanja, došlo je do njihove podele (18 vek, Joule, Mayer, Gay, ...)

IDEALNI GASOVI		
$c_V = \text{const}$ $c_p = \text{const}$	Zavise od vrste gasa, tab. 3.3.4. str. 23b	
$C_{m,V} = \text{const}$ $C_{m,p} = \text{const}$	Zavise samo od od broja atoma u molekulu gasa, tab. 3.3.3. str. 23b	
Robert Mayer		
$c_p - c_V = R; \quad C_{m,p} - C_{m,V} = R; \quad \frac{c_p}{c_V} = \frac{C_{m,p}}{C_{m,V}} = \gamma = \text{const}$		

- Veza između toplotnih kapaciteta i unutrašnje energije kod idealnih gasova – **I energijska (kalorička) jednačina stanja**

$$u_2 - u_1 = c_v (T_2 - T_1)$$

$$U_2 - U_1 = mc_v (T_2 - T_1)$$

$$U_2 - U_1 = C_v (T_2 - T_1)$$

- Veza između toplotnih kapaciteta i entalpije kod idealnih gasova – **II energijska (kalorička) jednačina stanja**

$$h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1)$$

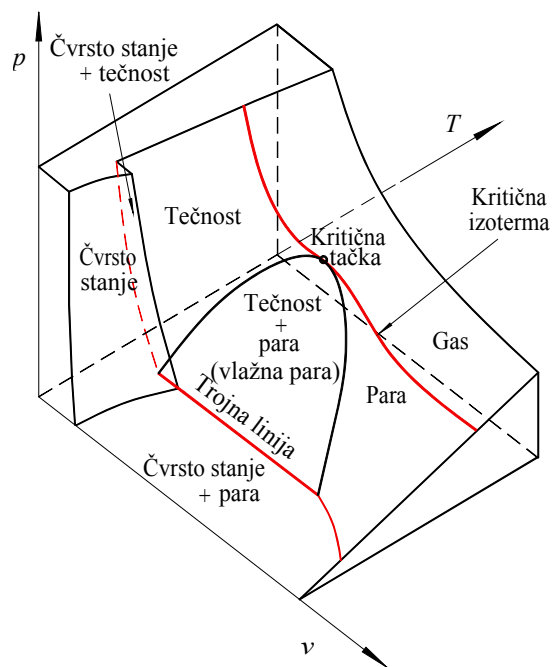
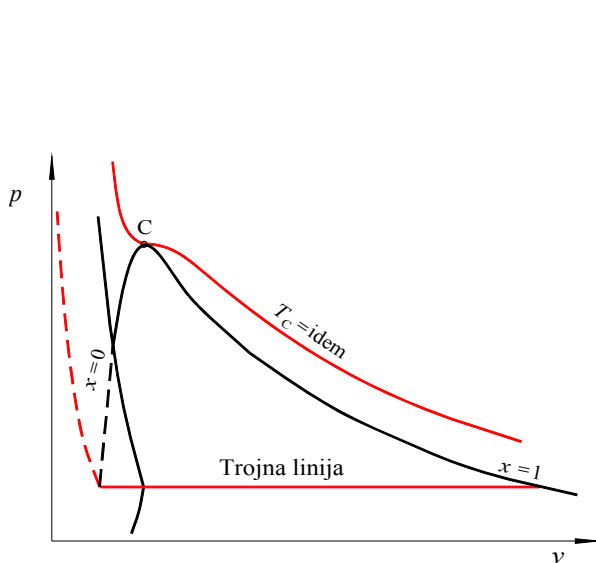
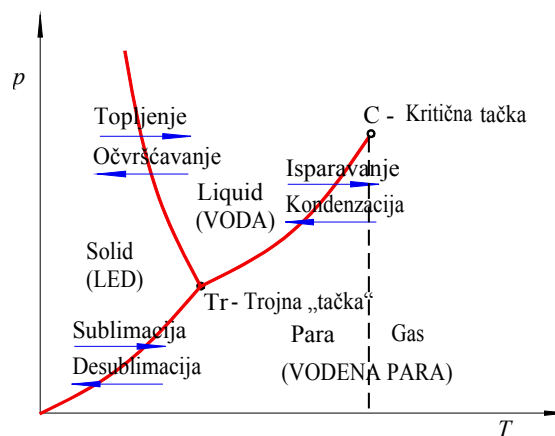
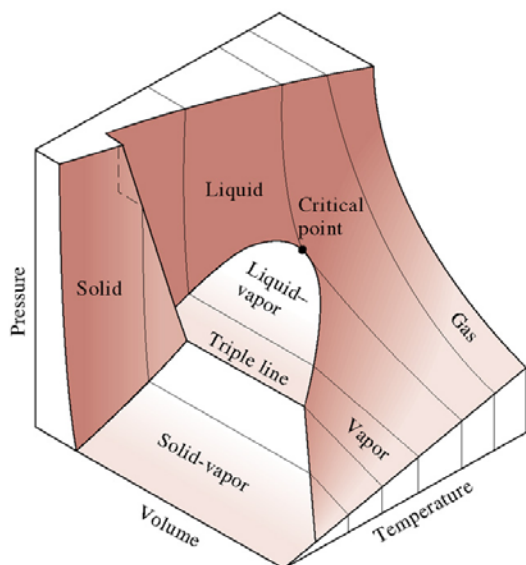
$$H_2 - H_1 = mc_p (T_2 - T_1)$$

$$H_2 - H_1 = C_p (T_2 - T_1)$$

### 3.3 Realni fluidi (materije)

#### Trodimenzijski dijagram stanja realnih radnih supstancija

H<sub>2</sub>O (led – voda – vodena para)



#### Veze između količina stanja

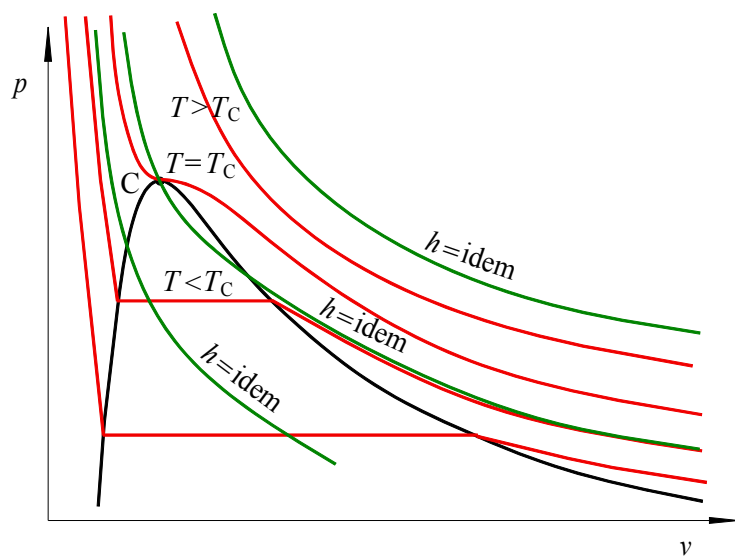
- Energetske jednačine stanja  

$$f(u, p, T) = 0$$

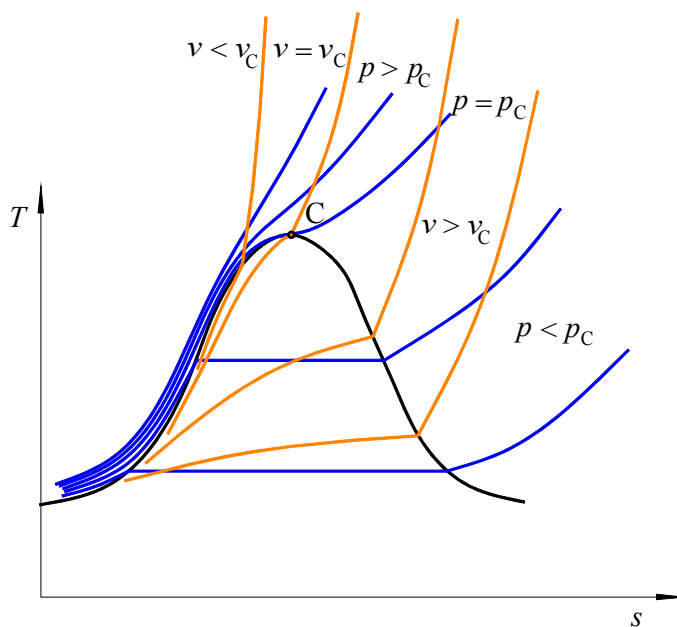
$$f(h, p, T) = 0$$
- Tablično

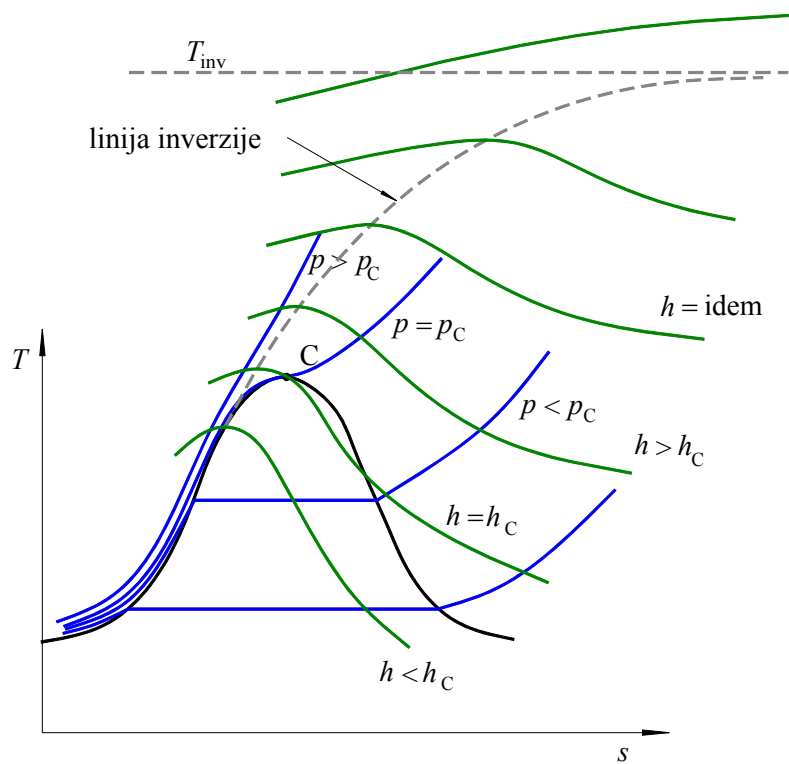
- Promene stanja realne radne supstancije (fluida), najlakše se analiziraju pomoću "grafičkih" jednačina stanja, takozvanih dijagrama stanja. Dijagrami stanja se za svaku radnu supstanciju formiraju posebno, na osnovu eksperimentalno dobijenih podataka.

1. **Klajperonova (Clapeyron) ravan** ( $p-v$  koordinatni sistem) – priručnik str. 34, sl. 4.2.1



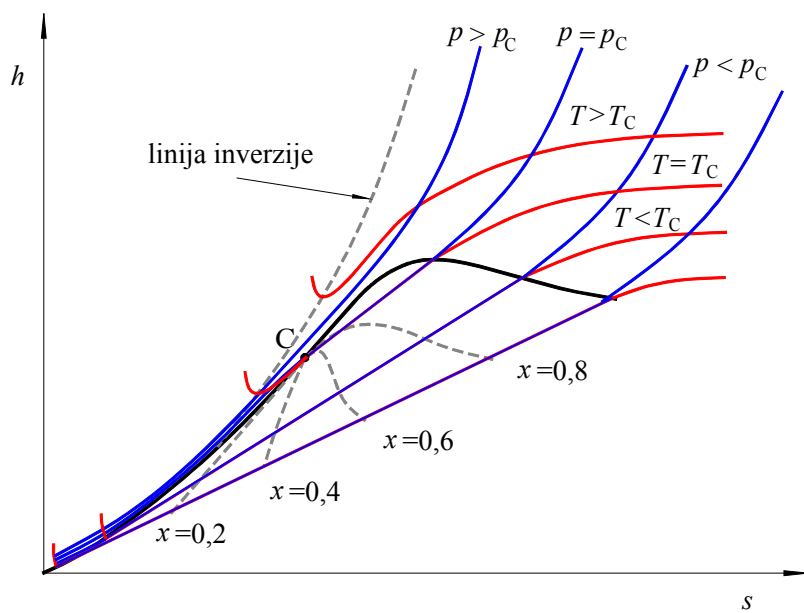
2. **Belperova (Belpaier) ravan** ( $T-s$  koordinatni sistem) – priručnik str.35, sl.4.2.2

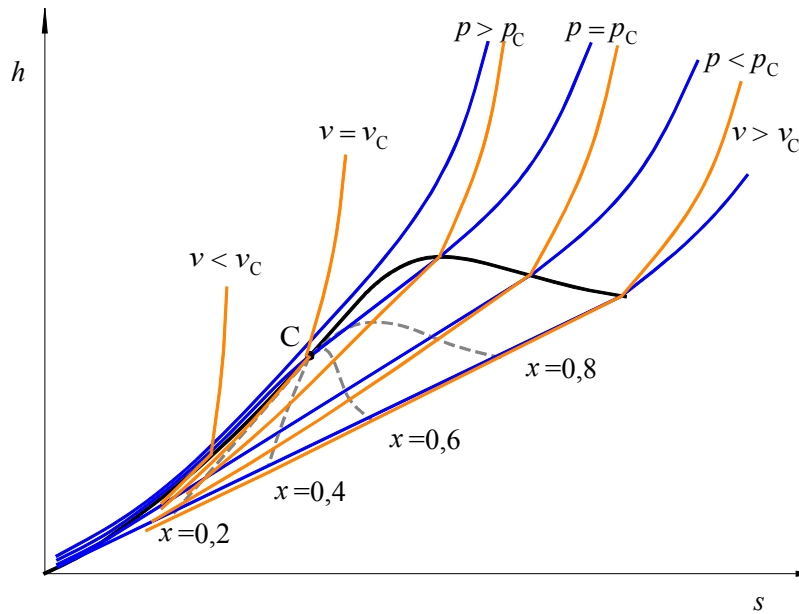




*Joule-Thompson-ov efekt*

### 3. Molierova (Mollier) ravan - $h-s$ koordinatni sistem – priručnik str.35, sl.4.2.3



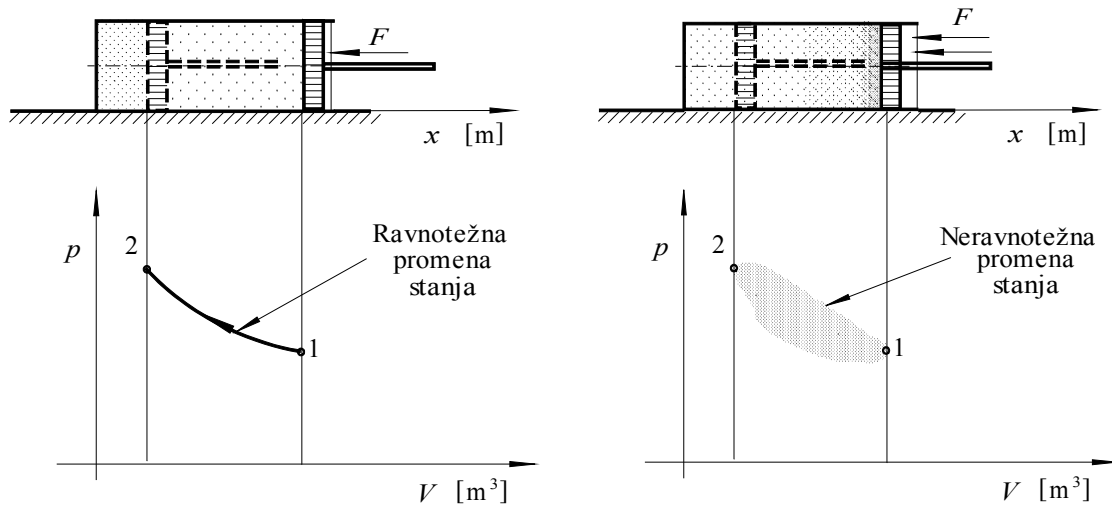


### 3.4 Ravnotežne i neravnotežne promene stanja idealnih gasova i realnih fluida u protočnim termodinamičkim sistemima

- Ponoviti lekcije – Politropske promene stanja idealnih gasova (Termodinamika - handout br.8 ) i Jednokomponentne realne radne supstancije (Termodinamika - handout br. 12.1 i 12.2)
- Sve promene stanja, bilo gasova, bilo para, mogu se podeliti na ravnotežne i neravnotežne promene stanja. U slučaju da se radna supstancija (gas ili para) nalazi u zatvorenom sistemu TDS, ove promene se mogu slikovito predstaviti na primeru sabijanja gasa u cilindru pri sporom kretanju klipa (prividno ravnotežno sabijanje gasa), odnosno pri brzom kretanju klipa (neravnotežno sabijanje gas – mehanička neravnoteža – neuniformno polje pritisaka )

Ravnotežne

Neravnotežne

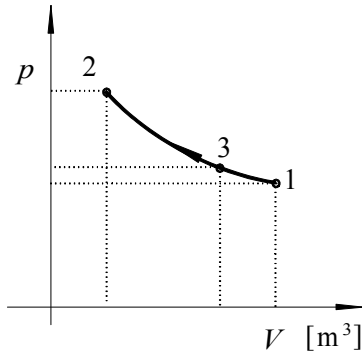


- U slučaju protočnog termodinamičkog sistema,



### 3.5 Ravnotežne politropne promene stanja idealnog gasa u zatvorenom termo-mehaničkom sistemu

„Indikatorski dijagram“



Osnovna osobenost politropskih promena stanja

$$p v^n = \text{idem}$$

$$n = \text{idem}$$

$n$  - eksponent politropske promene stanja idealnog gasa

$$p_1 v_1^n = p_2 v_2^n = p_3 v_3^n$$

Pomoću jednačine stanja idealnog gasa

$$p v = R T \rightarrow v = \frac{R T}{p} \text{ i } p = \frac{R T}{v}$$

$$1. \quad p v^n = p \left( \frac{R T}{p} \right)^n = \text{idem} \quad p^{1-n} T^n = \text{idem} \Rightarrow \boxed{p T^{\frac{n}{1-n}} = \text{idem}}$$

$$2. \quad p v^n = \frac{R T}{v} v^n = \text{idem} \Rightarrow \boxed{T v^{n-1} = \text{idem}}$$

- Kako odrediti predatu količinu toplote, odnosno izvršen zapreminski rad?

**Predata količina toplote**

$$1) \quad p v^n = \text{idem}$$

$$2) \quad p v = R T$$

$$3) \quad \delta q + \delta w_V = du \rightarrow \delta q - p dv = -c_V dT$$

$$1) \rightarrow d(p v^n) = 0$$

$$v^n dp + n p v^{n-1} dv = 0 \quad / : v^{n-1}$$

$$v dp + n p dv = 0 \dots\dots\dots (1')$$

$$2) \rightarrow d(p v) = d(R T)$$

$$p dv + v dp = R dT \dots\dots\dots (2')$$

(1')- (2')  $\rightarrow$

$$p(n-1)dv = -RdT \rightarrow p dv = -\frac{R}{n-1}dT$$

$$3) \quad \delta q = c_V dT + p dv = \left(c_V - \frac{R}{n-1}\right) dT$$

$$\delta q = \frac{c_V n - c_V - c_p + c_V}{n-1} dT$$

$$\boxed{\delta q = c_V \frac{n-\kappa}{n-1} dT} \Rightarrow \boxed{q_{1-2} = c_V \frac{n-\kappa}{n-1} (T_2 - T_1)}$$

Kako je

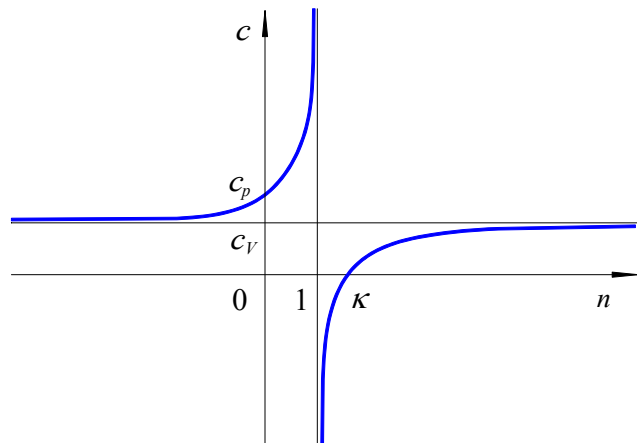
$$\delta q = c dT, \quad \delta q = c_V \frac{n-\kappa}{n-1} dT \quad \text{ i } c = \text{idem} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad c = c_V \frac{n-\kappa}{n-1} \quad - \text{ specifični topotni kapacitet politropske promene stanja idealnog gasa}$$

- Eksponent politropske promene stanja izražen preko specifični topotnog kapacitet  $c$

$$c = c_V \frac{n-\kappa}{n-1} \Rightarrow (n-1)c = c_V (n-\kappa) \Rightarrow n = \frac{c-c_p}{c-c_V}$$

- Promena specifičnog topotnog kapaciteta  $c$  politropske promene stanja idealnog gasa u zavisnosti od promene eksponenta  $n$



## Izvršeni radovi

### Izvršen zapreminski rad

- Po definiciji

$$w_{V,1-2} = - \int_1^2 p \, dv$$

- Korišćenjem osnovne relacije za politropske promene stanja i izražavanjem pritiska u funkciji specifične zapremine, te uvrštanjem prethodni izraz koji definiše zapreminski rad :

$$p v^n = \text{idem} \Rightarrow p_1 v_1^n = p_2 v_2^n = p v^n \Rightarrow p = \frac{p_1 v_1^n}{v^n}$$

$$w_{V,1-2} = -p_1 v_1^n \int_1^2 v^{-n} \, dv$$

- Integracijom dobijenog izraza:

$$w_{V,1-2} = -\frac{p_1 v_1^n}{1-n} \left[ v_2^{1-n} - v_1^{1-n} \right] = -\frac{p_1 v_1}{1-n} \left[ \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^{1-n} - 1 \right]$$

i korišćenjem termičke jednačine stanja za idealne gasove:

$$p v = R T \quad p_1 v_1 = R T_1$$

$$w_{V,1-2} = -\frac{R T_1}{1-n} \left[ \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^{1-n} - 1 \right]$$

kao i jedne od relacije za politropske promene stanja

$$T v^{n-1} = \text{idem} \Rightarrow T_1 v_1^{n-1} = T_2 v_2^{n-1} \Rightarrow \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^{n-1} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^{1-n} = \frac{T_2}{T_1}$$

sledi

$$w_{V,1-2} = \frac{R T_1}{n-1} \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right)$$

$$\boxed{w_{V,1-2} = \frac{R}{n-1} (T_2 - T_1)}$$

- Na drugi način

$$\delta q + \delta w_V = du$$

$$c \, dT + \delta w_V = -c_V \, dT \Rightarrow \delta w_V = c_V \, dT - c_V \frac{n-\kappa}{n-1} \, dT$$

$$\delta w_V = \frac{n c_V - c_V - n c_V + c_p}{n-1} \, dT \Rightarrow \boxed{w_{V,1-2} = \frac{R}{n-1} (T_2 - T_1)}$$

## Izvršen tehnički rad

- Po definiciji

$$w_{\text{teh},1-2} = \int_1^2 v \, dp$$

- Korišćenjem osnovne relacije za politropske promene stanja i izražavanjem pritiska u funkciji specifične zapremine, te uvrštavanjem prethodni izraz koji definiše zapreminski rad :

$$p_1 v_1^n = p v^n \Rightarrow v = \frac{v_1 p_1^n}{p^n}$$

$$w_{\text{teh},1-2} = v_1 p_1^{\frac{1}{n}} \int_1^2 p^{\frac{1}{n}} \, dp = \frac{v_1 p_1^{\frac{1}{n}}}{1 - \frac{1}{n}} \left[ p_2^{1 - \frac{1}{n}} - p_1^{1 - \frac{1}{n}} \right]$$

$$w_{\text{teh},1-2} = \frac{p_1 v_1}{\frac{n-1}{n}} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1 - \frac{1}{n}} - 1 \right] = n \cdot \frac{p_1 v_1}{n-1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right]$$

i korišćenjem termičke jednačine stanja za idealne gasove i kao i jedne od relacije za politropske promene stanja

$$p_1 v_1 = R T_1$$

$$p_1 T_1^{\frac{n}{1-n}} = p_2 T_2^{\frac{n}{1-n}} \Rightarrow \left( \frac{p_2}{p_1} \right) = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{n}{n-1}}$$

$$w_{\text{teh},1-2} = n \frac{R T_1}{n-1} \left[ \frac{T_2}{T_1} - 1 \right]$$

$$w_{\text{teh},1-2} = n \frac{R}{n-1} [T_2 - T_1]$$

ili

$$w_{\text{teh},1-2} = n w_{v,1-2}$$

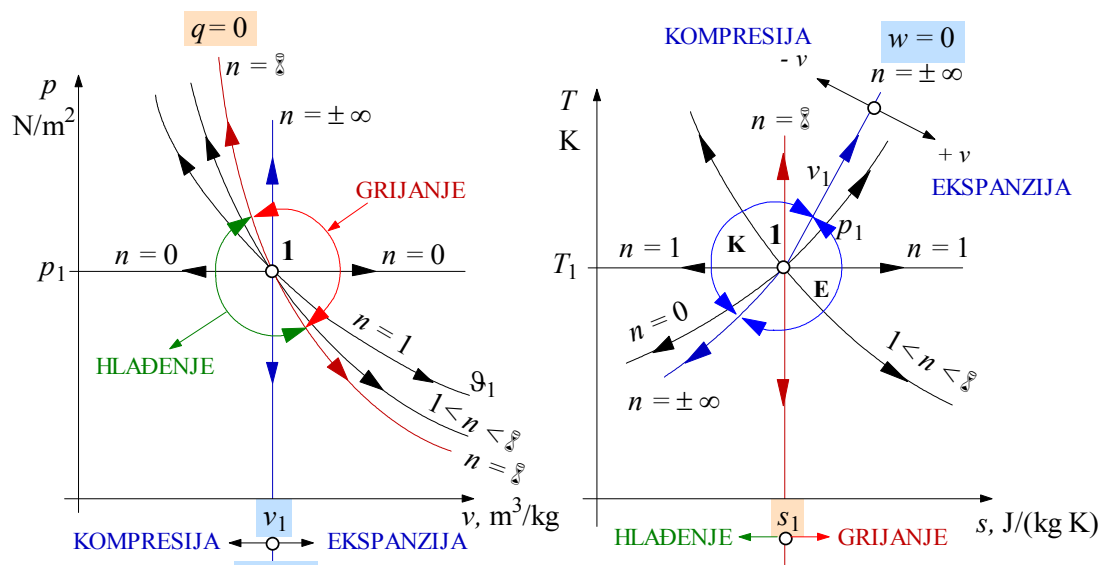
- Na drugi način

$$\delta q + \delta w_{\text{teh}} = dh$$

$$\delta w_{\text{teh}} = c_p \, dT - c_v \frac{n - \kappa}{n - 1} = \frac{c_p n - c_p - n c_v + c_p}{n - 1} dT$$

$$\delta w_{\text{teh}} = n \frac{R}{n-1} dT$$

$$w_{\text{teh},1-2} = n \frac{R}{n-1} dT$$



Prikaz politropnih promena stanja idealnog gasa u  $p-v$  i  $T-s$  koordinatnim sistemima

- Izobarska politropska promena,  $p = \text{idem}$

$$\underline{n = 0} \quad p v^0 = \text{idem} \quad c = c_p$$

$$\delta q = T ds \quad \delta q = c dT$$

$$\delta q + \delta w_{\text{teh}} = dh \rightarrow c dT = c_p dT \quad c = c_p$$

$$c_p = T ds$$

$$ds = c_p \frac{dT}{T} \rightarrow s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$T_2 = T_1 \exp \left[ \frac{s_2 - s_1}{c_p} \right] \rightarrow T = T_1 \exp \left[ \frac{s - s_1}{c_p} \right]$$

- Izotermaska politropska promena,  $T = \text{idem}$ ,  $c = \pm \infty$

$$n = 1 \quad p v = RT \quad p = \frac{p_1 v_1}{v} = \frac{\text{idem}}{v}$$

- Adijabatska politropska promena  $\delta q = 0$ ,  $n = \kappa$

a ako je i ravnotežna  $\Rightarrow$  Izentropska politropska promena stanja  $ds = 0$ ,  $s = \text{idem}$

$$\delta q + \delta w_{\text{teh}} = dh = c_p dT \rightarrow w_{\text{teh},1-2} = c_p (T_2 - T_1)$$

$$\delta q + \delta w_v = du = c_v dT \rightarrow w_{v,1-2} = c_v (T_2 - T_1)$$

Za sve politropne promene važi

$$w_{\text{teh},1-2} = n w_{V,1-2}$$

U ovom slučaju

$$w_{\text{teh},1-2} = \kappa w_{V,1-2}$$

pa je

$$\frac{w_{\text{teh},1-2}}{w_{V,1-2}} = \kappa = \frac{c_p}{c_v} = \gamma$$

• **Izohorska politropna promena stanja,  $v = \text{idem}$**

$$p v^n = \text{idem} \Rightarrow p^{\frac{1}{n}} v = \text{idem} \Rightarrow v = \frac{\text{idem}}{p^{\frac{1}{n}}} \text{ i } v = \text{idem} \Rightarrow n = \pm \infty, \quad c = c_v$$

$$\delta q + \delta w_V = du \rightarrow c dT = c_v dT \rightarrow c = c_v$$

$$c_v = T ds$$

$$ds = c_p \frac{dT}{T} \rightarrow s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$T_2 = T_1 \exp \left[ \frac{s_2 - s_1}{c_v} \right] \rightarrow T = T_1 \exp \left[ \frac{s - s_1}{c_v} \right]$$

## NERAVNOTEŽNE (NEKVAZISTATIČKE) PROMENE STANJA

**Primer 1.** Neravnotežni adijatermni proces širenja vodene pare u turbini (parnoj)

- turbine – vodena para kroz parnu turbinu protiče veoma brzo pa nema „vremena“ za predaju toplote!
- Turbine su obično i toplotno izoluju da bi se sprečio „gubitak“ energije

Teorijski (idealno)

$$P_{\text{teh}}^t = q_m \cdot w_{\text{teh},1-2}^t = q_m (h_2^t - h_1)$$

Stvarno (realno)

$$P_{\text{teh}} = q_m W_{\text{teh},1-2} = q_m (h_2 - h_1)$$

Stepen dobrote (unutrašnji stepen korisnosti) (izentropski stepen dobrote)

$$\eta_d^{\text{ex}} = \eta_i^{\text{tur}} = \frac{P_{\text{teh}}}{P_{\text{teh}}^t} = \frac{W_{\text{teh},1-2}}{W_{\text{teh},1-2}^t}$$

U slučaju na slici jednostepena turbina bez odvajanja pare  $\eta_d^{\text{tur}} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2^t}}$

**Primer 2.** Neravnotežni (nekvazistatički) adijatermni (adijabatski) proces sabijanja pare u kompresoru

$$P_{\text{teh}}^t = q_m (h_{2^t} - h_1) \quad - \text{teorijski, ravnotežno}$$

$$P_{\text{teh}} = q_m (h_2 - h_1) \quad - \text{realno, neravnotežno}$$

Stepen dobrote ili unutrašnji stepen korisnosti

$$\eta_d^{\text{kom}} = \frac{P_{\text{teh}}^t}{P_{\text{teh}}} \leq 1$$

$$\eta_d^{\text{kom}} = \eta_i^{\text{kom}}$$

$$\eta_d^{\text{kom}} = \frac{h_{2^t} - h_1}{h_2 - h_1}$$

**Primer 3.** Neravnotežni (nekvazistatički) adijatermni (adijabatski) proces povišavanja pritiska tečnosti u pumpi

Stepen dobrote ili unutrašnji stepen korisnosti pumpe

$$\eta_i^{\text{pm}} = \frac{h_{2^t} - h_1}{h_2 - h_1}$$

**Primer 4.** Proces adijatermnog prigušivanja realnog fluida (adijabatskog)

-smatramo  $\delta q = 0$ ,  $Q_{1-2} = 0$ ,  $\Phi = 0$

- brz proces
- nekada se i toplotno izoluje (retko)

$$\cancel{\Phi}^{=0} + \cancel{P_{\text{teh}}}^{=0} = q_m (h_2 - h_1)$$

$$h_2 = h_1 \quad h \neq \text{idem}$$